

引用格式: Xu Ning, Hu Yuxin, Geng Xiurui. A Review and Brief Analysis of Convex Geometry-based Spectral Unmixing Methods for Hyperspectral Imagery [J]. Remote Sensing Technology and Application, 2019, 34(5): 1028-1039. [许宁, 胡玉新, 耿修瑞. 凸体几何光谱解混研究进展及若干问题浅析[J]. 遥感技术与应用, 2019, 34(5): 1028-1039.]

doi: 10.11873/j.issn.1004-0323.2019.5.1028

凸体几何光谱解混研究进展及若干问题浅析

许宁^{1,2}, 胡玉新^{1,2,3}, 耿修瑞^{1,2,3}

(1. 中国科学院空间信息处理与应用系统技术重点实验室, 北京 100190;

2. 中国科学院电子学研究所, 北京 100190;

3. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 高光谱图像在高维特征空间中的凸体特性是凸体几何类光谱解混方法的理论依据, 这类光谱解混方法具有直观性强、复杂度低、效率高等优点, 是高光谱图像光谱解混方法研究的一个重要分支。本文旨在对国内外基于凸体几何理论的光谱解混方法进行回顾, 指出这类方法研究中需要特别关注的若干问题, 并着重对: ①数据降维对凸体几何端元提取方法的影响, ②两类经典的单形体体积衡量标准, ③3个单形体体积计算公式及其关系3个问题进行分析, 得到初步分析结果。

关键词: 凸体几何; 端元提取; 丰度估计; 光谱解混; 高光谱数据

中图分类号: TP394.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-0323(2019)05-1028-12

1 引言

高/多光谱图像中混合像元的存在, 使得传统的像素级遥感图像分类方法受到局限, 限制了高光谱遥感图像的精细化、量化处理和应用^[1-2]。光谱解混技术正是针对高/多光谱遥感图像中大量存在的混合像元而提出的一种信号分离技术^[3]。由于光谱解混可得到单个像元内更量化、更精细的地物信息, 也有学者称其为亚像元分类技术^[4]。目前, 光谱解混技术已经在地质勘探^[5]、城市调查^[6]以及农作物监测^[7]等遥感应用领域发挥了重要作用。光谱解混技术根据处理链路包括数据降维、端元获取和丰度估计等处理步骤^[2,8], 其中端元获取和丰度估计是光谱解混的重要环节。相较传统的光学全色图像, 高光谱图像光谱解混技术可获取图像中的亚像元地物信息, 其深入研究可进一步提升的高光谱图像精细化、量化应用水平, 对促进高光谱遥感数据在国民生产、军事侦察领域的推广应用具有重要

的作用。

一直以来, 光谱解混技术是国内外高光谱遥感领域的研究热点^[2,8], 已报道方法根据建模差异可分为线性和非线性光谱解混两大类。前者研究众多, 形成了主流的基于统计、稀疏回归以及凸体几何的处理方法^[2], 其中凸体几何类方法由于直观性强、易理解、计算量小受到了广泛关注^[9], 涌现出许多研究成果。本文结合国内学者的一些研究报道^[10-12], 着重从凸体建模求解方法(投影、凸锥以及单形体体积^[13])和纯像元存在假设两个角度对国内外凸体几何高光谱图像光谱解混方法进行回顾, 并对该类方法中的几个关键问题进行初步分析, 以为光谱解混方法的研究、学习和应用提供参考。

2 凸体几何光谱解混研究进展

基于Adams高光谱图像线性混合模型^[14]与凸集在数学表达上的等价性, 以及Craig最小单形

收稿日期: 2018-08-13; 修订日期: 2019-06-20

基金项目: “十三五”背景预研项目(105060301), 中国地质调查局地质调查项目(1212011120226)。

作者简介: 许宁(1982-), 男, 四川邛崃人, 助理研究员, 主要从事光学遥感图像配准、融合以及高光谱图像处理方面的研究。

E-mail: shouwang131@sohu.com。

体^[15]思想, Boardman最早将凸体几何理论^[16]引入到高光谱图像光谱解混研究, 该理论是凸体几何光谱解混研究的重要里程碑。总的来看, 凸体几何光谱解混方法的发展脉络可按不同的研究角度来梳理, 一种按正交投影、凸锥以及单形体体积等凸体建模求解方法进行划分, 另一种则以图像中是否存在纯像元为条件来划分。

2.1 正交投影、凸锥与单形体体积

基于正交投影、凸锥以及单形体体积来划分的光谱解混方法在丰度非负 (Abundance Nonnegativity Constraint, ANC) 和丰度和为一 (Abundance Sum-to-one Constraint, ASC) 两个物理约束方面存在差异。Chang等^[13]指出, 正交投影方法为无约束方法, 凸锥类方法则考虑非负约束, 而单形体体积类方法则考虑了ANC和ASC两个约束, 并证明了投影类ATGP方法与体积类SGA方法存在等价关系。这三类方法在三维空间中的几何描述如图1所示, 投影类方法在图像的特征空间寻找某个向量 V , 将像元向量对其投影求解极值作为端元; 凸锥方法认为在正象限, 非负像元光谱向量构建了O-ABC非封闭凸锥, 试图寻找凸锥的OA、OB、OC边界向量作为端元; 单形体体积则通过像元向量在子空间中张成的单形体的体积来获取端元, 图(1)中最大体积方法求解A、B、C以及 p_i 像元中由3个像元构建的最大三角形面积, 由于三角形ABC面积最大, OA、OB、OC为最终获得的端元向量。

正交投影 (Orthogonal Projection, OP) 将像元向量向某个指定向量或子空间进行投影, 通过判断

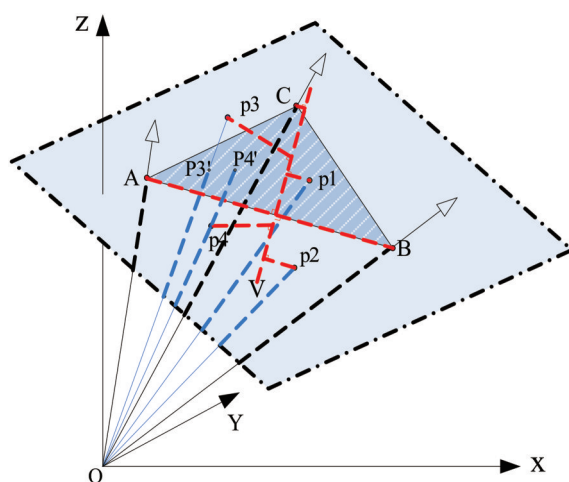


图1 三类凸体几何光谱解混方法的几何描述

Fig.1 The geometric description of three convex geometry spectral unmixing methods

投影值大小来实现光谱解混 (如图1所示)。像元纯净指数^[17] (Pixel Purity Index, PPI) 将像元向量投影到随机单位向量并记录极值来获取端元, 后续出现了快速迭代FIPPI^[18]、随机RPPI^[19]、优化迭代PPI (IPPI)^[20]以及空间邻域SPPI^[21]等多种优化算法; VCA (Vertex Component Analysis)^[22]和ATGP (Automatic Target Generation Process)^[23]将图像像元向已知端元张成的正交子空间进行投影, 求取最大投影值像元作为新的端元, 但二者在正交处理等方面存在差异^[13]; OP-SGA (OP-Simplex Growth Algorithm)^[24]端元提取算法将SGA的单形体体积计算简化为像元向量与已知端元基向量的OP计算; SPA (Successive Projection Algorithm) 则结合了OP与像元光谱的空间邻域特性。施密特正交化 (Gram-Schmidt Orthogonalization, GSO) 用于向量组的正交化变换, 与正交子空间投影 (Orthogonal Subspace Projection, OSP)^[25]存在等价关系^[26], 因此本文将OSP、GSO类方法也归入到正交投影一类。在OSP、GSO的光谱解混应用方面, 国内有学者提出了非监督正交子空间投影光谱解混方法 (UOSP)^[27]、最小光谱信息熵OSP^[28]以及采用GSO获取端元投影向量^[29]的方法, 而零空间投影算法^[30]是一种与OSP算子相似的端元提取方法。其后, 国内学者又提出了采用正交基分析^[31-32] (Orthogonal Bases Approach, OBA)、GSO向量投影的丰度估计^[33]方法。在国外, Heylen等^[34]提出的单形体投影 (SPU) 全约束丰度估计方法可提升端元提取和丰度估计的效率。在OBA基础上, FUN^[35] (Fast UN-mixing) 方法采用改进GSO方法来进行高光谱图像的端元提取和丰度估计。近期出现的几何-SGA (Geometric-SGA) 方法则从简化体积计算等角度, 采用GSO对SGA算法进行优化^[36]。近期, GSO被用于代替传统N-FINDR算法的降维处理和体积计算, 从而优化计算效率^[37]。

单形体体积 (Simplex Volume, SV) 类方法根据纯像元存在假设条件可分为最大体积和最小体积包裹标准两类。最大体积类光谱解混方法通过单形体体积膨胀, 获取最大单形体顶点作为端元, 经典方法有N-FINDR^[38]、SGA^[39]方法。N-FINDR同步求解端元矩阵行列式的最大值来获取端元, 而SGA是逐个求解端元的N-FINDR优化版本^[26]。以N-FINDR为引子, 出现了以距离测度替换体积计算^[40]、Sequential N-FINDR (SQ N-FINDR)^[41]、

改进搜索策略的N-FINDR^[42]、SuCcessive N-FINDR (SC N-FINDR)^[43]、Iterative N-FINDR (IN-FINDR)^[43]、Random N-FINDR^[44]、矩阵分解LDU-N-FINDR^[45]、丰度估计MN-FINDR^[46]、代数余子式N-FINDR^[47]、DN-FINDR^[48]等效率优化方法,以及更换初始化条件^[49]、引入支持向量机^[50]等来提升N-FINDR精度的方法。以SGA为基础,出现了Real-Time SGA (RT SGA)^[51]、辅助高Cayley-Menger行列式^[52]、矩阵三角分解^[53]、逐波段处理SGA (PBP-SGA)^[54]、快速Gram行列式 (FG-DA)^[55]、快速SGA^[56]等提升计算速度,以及支持向量机SGA^[57]、核SGA (Kernel New SGA, KNS-GA)^[58]等提升解混精度的方法。零空间最大距离端元提取方法^[59]与最大体积方法原理相似,将体积简化为距离计算来提升效率。最小体积包裹类方法则求解包裹高光谱图像像元的最小单形体顶点作为虚拟端元,其以最小体积变换 (Minimum Volume Transform, MVT)^[60]为基础,后续出现了最小体积约束非负矩阵分解 (MVC-NMF)^[61]、最小体积包裹单形体 (MVES)^[62]、最小体积单形体分析 (MVSA)^[63-64]、Chance约束MVES^[65]、MIN-VEST^[66]、超平面MVES^[67]、鲁棒MVES (RMVES)^[68]、鲁棒最小体积解混 (RMVHU)^[69]等方法。另外,从单形体体积计算的角度,新的体积计算公式可消除降维对数据的影响^[70],体积比/质心坐标^[71-73]以及子空间距离^[74]可以从凸体几何角度获取高光谱图像丰度系数,几何优化模型 (GOM)^[75]利用体积比的ASC约束进行端元估计,体积不变约束几何最优模型 (VIC-GOM)^[76]则进一步探索了整合线性混合模型重构误差与体积不变约束的最优解,该方法可进一步对传统算法的端元获取精度进行优化。

相较正交投影、单形体体积类光谱解混方法,凸锥分析 (Convex Cone Analysis, CCA) 方法以高光谱图像各像元非负辐亮度物理特性为基础,通过寻找所有像元形成凸集的边缘或顶点来实现光谱解混^[77]。以此为基础,有学者基于凸锥原理,采用改进的施密特正交分解法来获取端元^[78],并根据像元向量与凸锥的角度关系提出了顺序最大角凸锥端元提取算法^[79];同期,国内也有学者提出了自动的CCA^[80]以及基于凸体边界搜索^[81]的端元提取方法;而Gamma算法的引入,可有效实现CCA端元提取中线性不等式组的计算^[82];CCA与N-FINDR结

合可减小CCA端元提取方法的计算复杂度^[83];最近提出的凸锥体积分析 (Convex Cone Volume Analysis, CCVA) 和几何凸锥体积分析 (Geometric CCVA, GCCVA)^[84-85]通过将凸锥边缘向量向超平面的投影来减小图像背景信号对光谱解混的影响,同时也搭建了CCA与单形体体积求解的桥梁,简化了CCA方法的计算复杂度。

可以看出,近30 a来,凸体几何类光谱解混方法的发展主要体现在两个方向,一是对高光谱图像在高维特征空间几何结构模型的优化,以线性混合模型为基础,加以ANC、ASC等不同的约束条件,构造光谱解混数学模型,出现了投影、凸锥和单形体体积等不同类型的光谱解混方法;二是在算法层面对计算效率和精度的优化,从端元矩阵行列式计算到矩阵三角分解、辅助高、单形体高、单形体正化^[86]等的计算简化,以及在端元获取和丰度估计方面通过光谱解混模型的优化^[87]来提升精度。

2.2 高光谱图像中纯像元存在假设

从另一个角度—图像中纯像元存在假设,也可对凸体几何类端元获取方法进行划分,后续的丰度估计可采用最小二乘法^[88]或凸体几何关系来求解^[72]。满足纯像元存在假设类方法以图像中至少存在一个纯像元为前提,通过高光谱图像的凸体几何结构特征分析,从图像中获取存在的纯像元,因此这类方法被称为端元提取,典型的方法有PPI、N-FINDR、SGA、CCVA及其优化方法等;而无需纯像元假设的算法适用于更多的场景,其通过建立凸体结构目标函数优化模型并求解来获取虚拟端元^[89],这些端元是对图像中纯像元的估计,因此这类方法常被称为端元生成方法,典型的方法有MVES、MVSA等。

对于以图像中纯像元是否存在来划分的这两大类光谱解混方法,从计算量和算法意义的角度来看,满足纯像元存在假设类方法只需进行单形体体积计算和比较,其物理意义明确,因此相较后者具有计算量小、算法优化设计多等优点^[2],但是在实际应用中,多数场景纯像元假设条件难以满足,会影响端元提取的精度;而后者则从图像中估计端元矩阵,适用于更多的场景,但需要采用优化方法对目标函数进行迭代求解,导致这类算法计算量偏大。同时,无论是端元提取还是端元生成方法,均容易受到图像噪声、异常点的影响,所幸已有方法^[87,90]针对这类问题进行了探索,但由于噪声在真实数据中

的广泛存在,这类克服噪声等干扰信息的方法还需进一步深入研究。

3 凸体几何光谱解混中的若干问题

经过多年的研究,凸体几何光谱解混类方法取得了丰硕的研究成果,其中端元获取方面仍有一些问题值得进一步关注,例如高光谱图像降维处理对端元提取的影响、凸体体积类方法的体积衡量标准及其差异、算法中采用的体积公式及其关系、典型的投影-凸锥-单形体体积类方法间的关系、初始化条件对部分光谱解混结果的影响、光谱解混中的噪声及外点抑制等问题,本文着重对前3个问题进行回顾,并作简单分析。

3.1 数据降维对端元提取的影响

数据降维处理在高光谱图像处理过程中可降低计算开销,同时也可满足N-FINDR、SGA等经典算法利用行列式进行单形体体积计算时的方阵所需,是一种经常被采用的高光谱图像处理方法。典型的数据降维方法主要有主成分分析(PCA)^[91]、最大噪声分离(MNF)^[92]等。通常情况下,数据降维处理会造成一些

小目标信息的损失^[93],但是,也有学者认为数据降维可提升端元提取算法的性能^[26]。针对不同噪声条件下数据降维对凸体几何类端元提取方法的影响,本文采用模拟数据对3种比较典型的端元提取方法ATGP(投影)、N-FINDR(体积)以及CCVA(凸锥)进行验证。模拟数据采用公式(1)生成:

$$\mathbf{y} = \mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{y} \in R^m$ 为生成的像元光谱向量, $\mathbf{E} \in R^{m \times i}$ 为*i*个端元构成的端元矩阵, $\mathbf{x} \in R^i$ 为模拟的丰度系数向量, $\mathbf{n} \in R^m$ 为加入的高斯噪声。模拟数据生成方法:从USGS矿物光谱库中选定3个端元(见表(1)注)作为端元矩阵 $\mathbf{E} \in i^{187 \times 3}$,每个端元含187个波段,并生成满足狄利克雷分布的丰度系数 $\mathbf{X} \in i^{3 \times 10000}$,采用公式(1)右侧第一项生成10 000个混合像元,再随机选择第[5 198;4 352;2 757]个生成的混合像元,将其替换为3个光谱库真实端元,最后增加噪声合成不同信噪比数据。实验采用3种算法分别对不降维和降维数据进行处理,得到的端元脚标位置如表1所示,其中采用降维处理的方法以-DR来表示。

表1 3种端元情况下不同方法提取端元的位置

Table 1 The positional indices of obtained three endmembers by different methods

算法	ATGP	ATGP-DR	N-FINDR	N-FINDR-DR	CCVA	CCVA-DR
20 dB	[8163;6033;5936]	[3374;5936;1184]	[5490;5936;8179]	[3282;2757;4322]	[8179;2757;6737]	[8179;3939;5936]
30 dB	[1465;4352;7178]	[4352;8662;3511]	[3511;1645;4352]	[9226;2757;4352]	[3511;4352;7500]	[4352;2356;8662]
40 dB	[5198;2461;2757]	[4352;6189;1569]	[2173;2461;2757]	[2757;4352;5198]	[4352;2757;2173]	[2757;4352;2173]
∞	[5198;4352;2757]	[4352;5198;2757]	[5198;4352;2757]	[2757;4352;5198]	[4352;2757;5198]	[4352;2757;5198]

注:采用的矿物光谱—明矾石(Alunite AL706 Na)、水铍长石(Buddingtonite GDS85 D-206)以及高岭石(Kaolinite CM7)

从表1可看出,对于采用3个端元模拟的数据,降维处理对无噪声数据没有影响,均可获得真实端元,但随着信噪比降低,不同方法获取真实端元的能力减弱。从获取真实端元的数量来看,降维处理对于体积类N-FINDR方法具有优化作用,即在不同信噪比条件下N-FINDR-DR均获得最优结果,而对于投影类ATGP和凸锥类CCVA方法,降维对它们影响不大。另外,也开展了6个和9个光谱库端元模拟数据的处理,发现信噪比为20 dB时获得端元脚标存在较大偏差,N-FINDR-DR结果最优,而信噪比为30、40 dB时,这6种方法仍然有效地获取到真实端元,限于篇幅,这里不再对结果进行罗列。另外,对SNR为30、40 dB两组数据的实验结果,利用光谱角制图(Spectral Angle Mapping, SAM)计算真实端元与6种方法获取端元的差异,

如图2所示,可看出在两组实验中,N-FINDR-DR均取得了更小的SAM值。

综上,通过对不同端元数量、不同信噪比模拟数据的实验结果表明,对于具有投影、体积以及凸锥代表性的ATGP、N-FINDR及CCVA方法,数据降维处理对N-FINDR优化效果明显,而对另外两种方法影响不大;采用不同端元数量的模拟数据实验结果也表明,当高光谱影像中存在3个以上端元时,数据降维处理对于优化凸体几何类N-FINDR方法是有效的。

3.2 两个经典的体积衡量标准

在单形体体积类光谱解混方法中,最大体积和最小体积包裹为两类经典方法,也是凸体体积类光谱解混方法的两个体积标准。最大体积以端元存在假设为前提,通过计算所有像元张成单形体的最

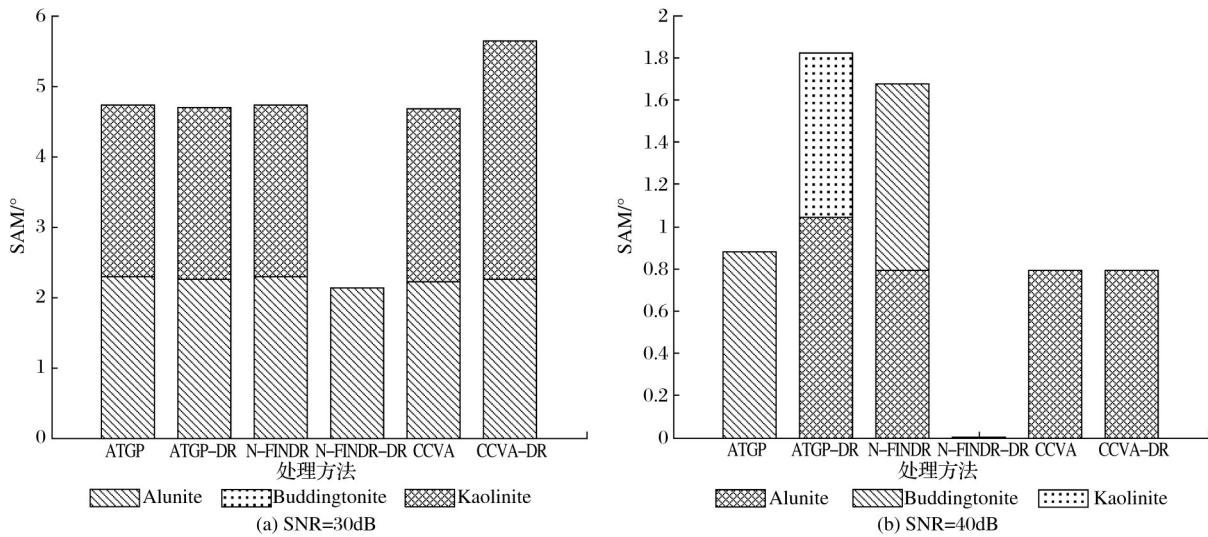


图2 6种方法得到端元与真实端元的SAM比较

Fig.2 The SAM between endmembers obtained by different methods and the true ones

大体积来得到指定个数的端元;而最小体积包裹标准则无需纯像元假设,通过计算包裹所有像元的向量作为虚拟端元。容易理解,在无噪声的理想状态下,最大体积和最小体积标准可获得一致结果。实验采用的无噪声模拟数据如图3(a)所示,在加入不同量级噪声(信噪比 $\text{SNR}=20\text{ dB}$ 、 40 dB)的情况下,采用两类体积标准得到结果如图3(b)和(c)所示,可看出,在噪声存在情况下,部分数据点外溢到真实单形体之外,从而导致计算得到的最大体积和最小体积包裹均与真实单形体有所差异。从实验结果来看,最小体积包裹标准获得的单形体均偏大;而最大体积标准获得的单形体在 SNR 为 40 dB 时与真实单形体差异不大,但在 SNR 为 20 dB 的时体积也明显偏大。另外,由于模拟数据生成时采用的丰度系数满足狄利克雷分布,因此在无噪声条件下,图3(a)中的数据在同一平面上,而加入噪声后,模拟数据不再满足 ASC 和 ANC, SNR 为 20 dB 模拟数据的某视角可看出其数据点不在一个平面内(图3(d)),因此,当采用凸体几何类方法进行丰度系数求解时,需要对这类单形体之外的数据点(外点)进行重点考虑,例如 SPU^[34]采用迭代投影来实现这些外点向单形体面的投影,再对投影后的数据点进行丰度估计。

从实验结果可看出,最大体积标准获得的端元是模拟数据中存在的点,而最小体积包裹标准获得的是虚拟端元,其在实际数据点中并不存在。在噪声满足高斯分布且纯像元存在的条件下,从不同信噪比实验数据结果可以看出,最大体积标准获

得的端元更接近真实端元。而在无纯像元条件下,有学者已经通过数值模拟结果表明,最小体积包裹标准可获得更鲁棒的端元估计^[94]。

3.3 3个体积公式及其关系

在线性代数中,行列式计算的几何意义为行/列向量张成的平行多面体的体积。在高光谱数据凸体几何类光谱解混方法中,最大体积标准类方法均需要通过体积计算来提取端元。目前为止,文献中常用的体积计算公式主要有3种,这些公式及其对应的一些典型算法如表(2)所示。其中, N-FINDR 等算法采用的体积计算公式为:

$$V = \frac{1}{(n-1)!} \left| \begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{matrix} \right| \quad (2)$$

其中: n 为端元数, $|\cdot|$ 表示行列式计算, $\mathbf{e}_i \in R^{n-1}$ 为降维后的端元向量。公式(2)中行列式求解需要方阵,因此需要在行列式计算前进行高光谱数据的降维处理。为实现在原始数据空间计算单形体体积,减少数据降维处理对一些目标信息的影响^[93],出现了一种新的体积计算公式^[95]:

$$V = \frac{1}{(n-1)!} \sqrt{(\mathbf{E}_{n-1})^T \mathbf{E}_{n-1}} \quad (3)$$

该公式与公式(2)等价^[95],式中 $\mathbf{E}_{n-1} = [\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_1]$ 表示光谱向量 $\mathbf{e}_i (i \geq 2)$ 与初始化端元光谱向量 \mathbf{e}_1 的差值构成的矩阵, $(\cdot)^T$ 为矩阵转置。

在已知单形体各棱边边长的情况下,可采用 Cayley-Menger 行列式来计算单形体体积,该公式也被用于高光谱图像端元提取^[52],由于矩阵元素采用 n 个端元光谱向量间的相互距离,因此必然为方

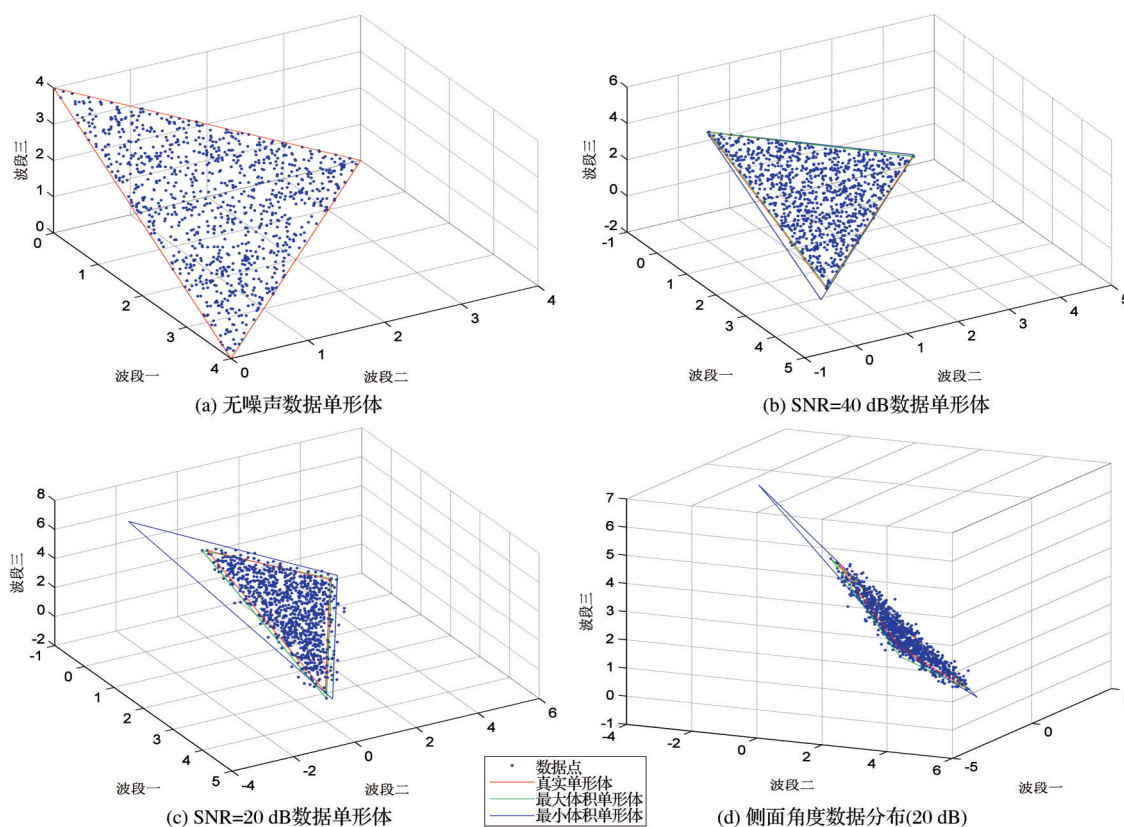


图 3 模拟数据单形体计算结果图示

Fig.3 The obtained simplexes by different volume criterion

阵(公式(4)),无需对高光谱图像进行降维处理。

$$V^2 = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}((n-1)!)^2}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d^2(1,1) & d^2(1,2) & \cdots & d^2(1,n) \\ 1 & d^2(2,1) & d^2(2,2) & \cdots & d^2(2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & d^2(n,1) & d^2(n,2) & \cdots & d^2(n,n) \end{vmatrix} \quad (4)$$

其中: n 为单形体顶点数(端元个数), $d(i,j) = \|e_i - e_j\|$ 表示单形体顶点 i 与顶点 j 之间的欧氏距离。可以证明,公式(4)与公式(2)等价,证明过程请参见附录。

通过以上分析可以看出,3个体积公式在实际光谱解混应用中各有优缺点。例如公式(2)需要降维后处理,而公式(3)和(4)无需降维,但需要进行向量内积计算;在进行高光谱数据单形体计算时,

表 2 3个体积公式及其对应的典型端元提取算法

Table 2 The corresponding algorithms of three volume formulas

体积公式编号	典型算法	公式特点
公式(2)	N-FINDR、SQ N-FINDR、改进策略 N-FINDR、SC N-FINDR、IN-FINDR、Random N-FINDR、代数余子式 N-FINDR、LDU-N-FINDR 用到该公式的变形,以及 SGA、RT SGA、PBP-SGA	需首先对高光谱数据进行降维处理,保证端元矩阵的方阵特性
公式(3)	DN-FINDR、KNSGA 算法,矩阵三角分解、FGDA、快速 SGA 用到该公式的变形	无需对数据进行降维处理,需计算像元向量差值及内积
公式(4)	Cayley-Menger 行列式方法	无需对数据进行降维处理,需计算像元间欧式距离

对于同一场景的高光谱图像,由于降维处理的需要,3个公式计算得到的体积并不相同。但从代数角度,3个体积公式是完全等价的。

4 结 语

本文以凸体几何类光谱解混方法为分析对象,分别从正交投影、凸锥、单形体体积以及图像中纯

像元假设两个不同的划分角度,对高光谱图像凸体几何类光谱解混方法的研究进展进行了回顾,总结了凸体几何类高光谱图像光谱解混方法的主要发展方向,即集中在光谱解混凸体几何结构模型优化和处理性能、解混精度提升两个方面。

同时,对凸体几何类光谱解混方法中一些值

得关注的问题进行了总结,着重对数据降维处理对端元提取的影响、两个体积标准对于不同信噪比数据的计算差异以及凸体几何类光谱解混方法中用到的3个体积公式进行了对比分析,可为凸体几何类高光谱图像光谱解混方法的学习和应用提供参考。

附录:公式(2)与公式(4)的等价性证明

令公式(2)行列式中的矩阵为A,根据公式(2)及转置矩阵行列式的性质,有:

$$((n-1)! \cdot V)^2 = |\mathbf{A}^T| \cdot |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1+\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 & 1+\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 & \cdots & 1+\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_n \\ 1+\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 & 1+\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 & \cdots & 1+\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_n \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1+\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_1 & 1+\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_2 & \cdots & 1+\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n \end{vmatrix} \quad (5)$$

引入行列式代数余子式引理,根据行列式性质,对上式(5)进行变换,可得:

$$((n-1)! \cdot V)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_n \\ -1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -1 & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_n \\ 1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n \end{vmatrix} \quad (6)$$

这里,引入一个与各个端元有关的矩阵 $\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$,可知 $|\bar{\mathbf{A}}| = 0$,因此有,

$$|\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}}| = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{e}_1^T \\ 0 & \mathbf{e}_2^T \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \mathbf{e}_n^T \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_n \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

对上式(6)最后行列式做第一行的代数余子式分解,结合公式(7),可得:

$$(-1)((n-1)! \cdot V)^2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_n \\ 1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_n \\ 1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n \end{vmatrix} \quad (8)$$

由于公式(4)中,

$$d^2(i,j) = (\|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\|)^2 = \left(\sqrt{(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)} \right)^2 = (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i - 2\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j^T \mathbf{e}_j \quad (9)$$

对比公式(4),需要在公式(8)中构造公式(9)右侧的表达式,因此,根据行列式性质有:

$$(-1)((n-1)! \cdot V)^2 = \frac{1}{(-2)^{n-1}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -2\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 & -2\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 & \cdots & -2\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_n \\ 1 & -2\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 & -2\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 & \cdots & -2\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & -2\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_1 & -2\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_2 & \cdots & -2\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n \end{vmatrix} \quad (10)$$

再利用行列式性质,对第 $i \geq 2$ 行加第1行的 $\mathbf{e}_{i-1}^T \mathbf{e}_{i-1}$ 倍,对第 $j \geq 2$ 列加第一列的 $\mathbf{e}_{j-1}^T \mathbf{e}_{j-1}$ 倍,行列式值不变,得到:

$$(-1)((n-1)! \cdot V)^2 = \frac{1}{(-2)^{n-1}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n \\ 1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n - 2\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n - 2\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n - 2\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n \end{vmatrix} \quad (11)$$

将公式(9)代入公式(11),得到:

$$(-1)((n-1)! \cdot V)^2 = \frac{1}{(-2)^{n-1}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d^2(1,1) & d^2(1,2) & \cdots & d^2(1,n) \\ 1 & d^2(2,1) & d^2(2,2) & \cdots & d^2(2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & d^2(n,1) & d^2(n,2) & L & d^2(n,n) \end{vmatrix} \quad (12)$$

因此,由公式(2)推导了公式(4),证明二者等价,得证。

参考文献(References):

- [1] Tong Qingxi, Zhang Bing, Zheng Lanfen. Hyperspectral Remote Sensing-Principle, Technology and Application[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.[童庆禧,张兵,郑兰芬.高光谱遥感—原理、技术与应用[M].北京:高等教育出版社,2006.]
- [2] Bioucas-Dias J M, Plaza A, Dobigeon N. Hyperspectral Unmixing Overview: Geometrical, Statistical, and Sparse Regression-based Approaches [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2012, 5(2): 354-379.
- [3] Settle J J, Drake N A. Linear Mixing and The Estimation of Ground Cover Proportions [J]. International Journal of Remote Sensing, 1993, 14(6): 1159-1177.
- [4] Tand Wei, Shi Z W, Wu Y, *et al.* Sparse Unmixing of Hyperspectral Data Using Spectral a Priori Information [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2015, 53(2): 770-783.
- [5] Zadeh M H, Tangestani M H, Roldan F V, *et al.* Sub-pixel Mineral Mapping of a Porphyry Copper Belt Using EO-1 Hyperion Data [J]. Advances in Space Research, 2014, 53(3): 440-451.
- [6] Zhang C Y. Multiscale Quantification of Urban Composition from EO-1/Hyperion Data Using Object-based Spectral Unmixing [J]. International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation, 2016, 47(1):153-162.
- [7] Yang C H, Everitt J H, Du Q. Applying Linear Spectral Unmixing to Airborne Hyperspectral Imagery for Mapping Yield Variability in Grain Sorghum and Cotton Fields [J]. Journal of Applied Remote Sensing, 2010, 4(1): 1-11.
- [8] Keshava N, Mustard J F. Spectral Unmixing [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2002, 19(1): 44-57.
- [9] Xu Ning. Study on Hyperspectral Remote Sensing Imagery Unmixing based on Spectral and Spatial Information[D]. Beijing: University of the Chinese Academy of Sciences, 2016. [许宁.基于光谱和空间信息的高光谱图像解混方法研究[D].北京:中国科学院大学,2016.]
- [10] Wang Maozhi, Xu Wenxi, Wang Lu, *et al.* Research Progress on Endmember Extraciton Algorithm and Its Classificaton of Hypersepctral Remote Sensing Imagery [J]. Remote Sensing Technology and Application, 2015, 30(4): 616-625.[王茂芝,徐文哲,王璐,等.高光谱遥感影像端元提取算法研究进展及分类[J].遥感技术与应用,2015, 30(4): 615-625.]
- [11] Lan Jinhui, Zou Jinlin, Hao Yanshuang, *et al.* Research Progress on Unmiging of Hyperspectral Remote Sensing Imagery [J]. Journal of Remote Sensing, 2018, 22(1): 13-27.[蓝金辉,邹金霖,郝彦爽,等.高光谱遥感影像混合像元分解研究进展[J].遥感学报,2018,22(1):13-27.]
- [12] Liu Ailin, Guo Baoping, Li Yanshan. Piecewise Convex Multiple-model Hyperspectral Imagery Endmember-extraction based on Discrete Particle Swarm Optimaization [J]. Remote Sensing Technology and Application, 2018, 33(2): 227-232. [刘爱林,郭宝平,李岩山.基于离散粒子群算法的凸多模态高光谱图像端元提取研究[J].遥感技术与应用,2018, 33(2):227-232.]
- [13] Chang C I, Chen S Y, Li H C, *et al.* Comparative Study and Analysis among ATGP, VCA, and SGA for Finding Endmembers in Hyperspectral Imagery [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2016, 9(9): 4280-4306.
- [14] Adams J B, Smith M O, Gillspie A. R. Simple Models for Complex Natural Surfaces: A Strategy for The Hyperspectral Era of Remote Sensing [C]//IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, British Columbia, Canada, 1989.
- [15] Craig M D. Unsupervised Unmixing of Remotely Sensed Images [C]//Proceedings of the Fifth Australasian Remote Sensing Conference, Perth, Australia, 1990.
- [16] Boardman J W. Automating Spectral Unmixing of AVIRIS Data Using Convex Geometry Concepts [C]//Proceedings of the JPL Airborne Earth Science Workshop, California, 1993.
- [17] Boardman J W, Kruse F A, Green R O. Mapping Target Signatures via Partial Unmixing of AVIRIS Data [C]//in Proceedings of the JPL Airborne Earth Science Workshop, Pasadena, CA, 1995.
- [18] Chang C I, Plaza A. A Fast Iterative Algorithm for Implementation of Pixel Purity Index [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2006, 3(1): 63-67.
- [19] Chang C I, Wu C C, Chen H M. Random Pixel Purity Index Algorithm [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2010, 7(2): 324-328.
- [20] Chang C I, Wu C C. Design and Development of Iterative Pixel Purity Index [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2015, 8(6): 2676-2695.

- [21] Cui Jiantao, Wang Jing, Li Xiaorun, *et al.* Endmember Extraction Algorithm based on Spatial Pixel Purity Index [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science Edition), 2013, 47(9): 1524-1530. [崔建涛, 王晶, 厉小润, 等. 基于空间像素纯度指数的端元提取算法 [J]. 浙江大学学报(工学版), 2013, 47(9): 1524-1530.]
- [22] Nascimento J M, Bioucas-Dias J M. Vertex Component Analysis: A Fast Algorithm to Unmix Hyperspectral Data [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2005, 43(4): 898-910.
- [23] Ren H, Chang C I. Automatic Spectral Target Recognition in Hyperspectral Imagery [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2003, 39(4): 1232-1249.
- [24] Li H C, Chang C I. Recursive Orthogonal Projection-based Simplex Growing Algorithm [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2016, 54(7): 3780-3793.
- [25] Harsanyi J C, Chang C I. Hyperspectral Image Classification and Dimensionality Reduction: An Orthogonal Subspace Projection Approach [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1994, 32(4): 779-785.
- [26] Du Qian, Raksuntorn N, Younan N H, *et al.* Endmember Extraction for Hyperspectral Image Analysis [J]. Applied Optics, 2008, 47(28): 77-84.
- [27] Wu Bo, Zhang Liangpei, Li Pingxiang. Unsupervised Orthogonal Subspace Projection Approach to Unmixing Hyperspectral imagery Automatically [J]. Journal of Image and Graphics, 2004, 9(11): 1392-1397. [吴波, 张良培, 李平湘. 非监督正交子空间投影的高光谱混合像元自动分解 [J]. 中国图象图形学报, 2004, 9(11): 1392-1397.]
- [28] Zhao Yan, Wang Donghui, Zhang Chunjin, *et al.* An Orthogonal Subspace Extraction Algorithm Projection for Endmember in Hyperspectral Images [J]. Journal of Engineering of Heilongjiang University, 2016, 7(3): 82-86. [赵岩, 王东辉, 张春晶, 等. 一种正交子空间投影高光谱图像端元提取算法 [J]. 黑龙江大学工程学报, 2016, 7(3): 82-86.]
- [29] Geng Xiurui, Tong Qingxi, Zheng Lanfen. Ground Object Extraction Algorithm of Hyperspectral Imagery based on Endmember Projection Vector [J]. Progress in Natural Science, 2005, 15(4): 509-512. [耿修瑞, 童庆禧, 郑兰芬. 一种基于端元投影向量的高光谱图像地物提取算法 [J]. 自然科学进展, 2005, 15(4): 509-512.]
- [30] Luo Wenfei, Zhong Liang, Zhang Bing, *et al.* Null Space Spectral Projection Algorithm for Hyperspectral Image Endmember Extraction [J]. Journal of Infrared Millimeter Waves, 2010, 29(4): 307-311. [罗文斐, 钟亮, 张兵, 等. 高光谱遥感图像端元提取的零空间光谱投影算法 [J]. 红外与毫米波学报, 2010, 29(4): 307-311.]
- [31] Tao Xuetao, Wang Bin, Zhang Liming. Orthogonal bases Approach for The Decomposition of Mixed Pixels in Hyperspectral Imagery [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2009, 6(2): 219-223.
- [32] Tao Xuetao, Wang Bin, Zhang Liming. A New Unmixing Method for Remote Sensing Image based on Orthogonal base on Data Space [J]. China Science: Information Science, 2009, 39(4): 454-467. [陶雪涛, 王斌, 张立明. 基于数据空间正交基的遥感图像混合像元分解新方法 [J]. 中国科学: 信息科学, 2009, 39(4): 454-467.]
- [33] Song Meiping, Xu Xingwei, Chang C I. *et al.* Orthogonal Vector Projection Algorithm for Spectral Unmixing [J]. Spectroscopy and Spectral Analysis, 2015, 35(12): 3465-3470. [宋梅萍, 徐行伟, Chein I, 等. 用于光谱解混的正交向量投影算法 [J]. 光谱学与光谱分析, 2015, 35(12): 3465-3470.]
- [34] Heylen R, Burazerovic D, Scheunders P. Fully Constrained Least Squares Spectral Unmixing by Simplex Projection [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2011, 49(11): 4112-4122.
- [35] Guerra R, Santos L, Lopez S, *et al.* A New Fast Algorithm for Linearly Unmixing Hyperspectral Images [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2015, 53(12): 6752-6765.
- [36] Chang C I, Li H C, Wu C C, *et al.* Recursive Geometric Simplex Growing Analysis for Finding Endmembers in Hyperspectral Imagery [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2017, 10(1): 296-308.
- [37] Li H C. Geometric N-Finder Algorithm for Finding Endmembers in Hyperspectral Imagery [C]//IEEE Geoscience and Remote Sensing Society. Fort Worth, Texas, USA. 2017.
- [38] Winter M E. N-FINDR: An Algorithm for Fast Autonomous Spectral Endmember Determination in Hyperspectral Data [C]//Proceedings of Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers Conference of Imaging Spectrometry V, Denver, CO, 1999.
- [39] Chang C I, Wu C C, Liu W M, *et al.* A New Growing Method for Simplex-based Endmember Extraction Algorithm [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2006, 44(10): 2804-2819.
- [40] Wang L G, Jia X P, Zhang Y. A Novel Geometry-based Feature-selection Technique for Hyperspectral Imagery [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2007, 4(1): 171-175.
- [41] Wu C C, Chu S, Chang C I. Sequential N-FINDR algorithm [C]//Society of Photo-optical Instrumentation Engineers Conference of Imaging Spectrometry XIII. San Diego, CA. 2008.
- [42] Wang Y, Guo L, Liang N. Using a New Search Strategy to Improve the Performance of N-FINDR Algorithm for Endmember Determination [C]//Proceedings of the 2009 2nd International Congress on Image and Signal Processing, Tianjing, China. 2009.
- [43] Xiong W, Wu C C, Chang C I, *et al.* Fast Algorithms to Implement N-FINDR for Hyperspectral Endmember Extraction [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2011, 4(3): 545-564.

- [44] Chang C I, Wu C C, Tsai C T. Random N-Finder (N-FINDER) Endmember Extraction Algorithms for Hyperspectral Imagery [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20 (3): 641-656.
- [45] Dowler S W, Rakashima R, Andrews M. Reducing the Complexity of the N-FINDER Algorithm for Hyperspectral Image Analysis [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22 (7): 2835-2848.
- [46] Ji L Y, Geng X R, Sun K, *et al.* Modified N-FINDER Endmember Extraction Algorithm for Remote Sensing Imagery [J]. International Journal of Remote Sensing, 2015, 36 (8): 2148-2162.
- [47] Li Lin, Meng Lingbo, Sun Kang, *et al.* A Fast N-FINDER Algorithm based on Cofactor of a Determinant [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2015, 37 (5): 1128-1134. [李琳, 孟令博, 孙康, 等. 基于代数余子式的 N-FINDER 快速端元提取算法 [J]. 电子与信息学报, 2015, 37 (5): 1128-1134.]
- [48] Zhao Chunhui, Guo Yunting. An Improved Fast N-FINDER Endmember Extraction Algorithm [J]. Acta Photonica Sinica, 2015, 44 (10): 1-8. [赵春晖, 郭蕴霆. 一种改进的快速 N-FINDER 端元提取算法 [J]. 光子学报, 2015, 44 (10): 1-8.]
- [49] Zortea M, Plaza A. A Quantitative and Comparative Analysis of Different Implementations of N-FINDER: A Fast Endmember Extraction Algorithm [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2009, 6 (4): 787-791.
- [50] Zhao Chunhui, Qi Bin, Wang Yulei. An Improved N-FINDER Hyperspectral Endmember Extraction Algorithm [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2012, 34 (2): 499-503. [赵春晖, 齐滨, 王玉磊. 一种改进的 N-FINDER 高光谱端元提取算法 [J]. 电子与信息学报, 2012, 34 (2): 499-503.]
- [51] Chang C I, Wu C C, Lo C S, *et al.* Real-Time Simplex Growing Algorithms for Hyperspectral Endmember Extraction [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2010, 48 (4): 1834-1850.
- [52] Pu Hanye, Wang Bin, Zhang Liming. Cayley-menger Determinant based Endmember Extraction Algorithm for Hyperspectral Unmixing [J]. Journal of Infrared Millimeter Waves, 2012, 31 (3): 265-270. [普晗晔, 王斌, 张立明. 基于 Cayley-Menger 行列式的高光谱遥感图像端元提取方法 [J]. 红外与毫米波学报, 2012, 31 (3): 265-270.]
- [53] Xia W, Pu H Y, Wang B, *et al.* Triangular Factorization based Simplex Algorithms for Hyperspectral Unmixing [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2012, 50 (11): 4420-4440.
- [54] Schultz R C, Hobbs M, Chang C-I. Progressive Band Processing of Simplex Growing Algorithm for Finding Endmembers in Hyperspectral Imagery [C]//SPIE Satellite Data Compression, Communications, and Processing X, 2014.
- [55] Sun K, Geng X R, Wang P S, *et al.* A Fast Endmember Extraction Algorithm based on Gram Determinant [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2014, 11 (6): 1124-1128.
- [56] Wang Lijiao, Li Xiaoren, Zhao Liaoying. Fast Implement of The Simplex Growing Algorithm for Endmember Extraction [J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34 (11): 1-7. [王丽皎, 厉小润, 赵辽英. 快速实现基于单形体体积生长的端元提取算法 [J]. 光学学报, 2014, 34 (11): 1-7.]
- [57] Wang Liguang, Zhang Jing, Liu Danfeng, *et al.* Distance Measurement based Methods from Endmember Selection to Spectral Unmixing [J]. Journal of Infrared Millimeter Waves, 2010, 29 (6): 471-475. [王立国, 张晶, 刘丹凤, 等. 从端元选择到光谱解混的距离测算方法 [J]. 红外与毫米波学报, 2010, 29 (6): 471-475.]
- [58] Zhao L Y, Zheng J P, Li X R, *et al.* Kernel Simplex Growing Algorithm for Hyperspectral Endmember Extraction [J]. Journal of Applied Remote Sensing, 2014, 8 (1): 083594-1-15.
- [59] Luo Wenfei, Zhong Liang, Liu Xiang, *et al.* Endmember Extraction Algorithm of Hyperspectral Imagery based on Maximum Distance of Null Space [J]. Progress in Natural Science, 2008, 18 (11): 1341-1345. [罗文斐, 钟亮, 刘翔, 等. 基于零空间最大距离的高光谱图像端元提取算法 [J]. 自然科学进展, 2008, 18 (11): 1341-1345.]
- [60] Craig M D. Minimum-volume Transforms for Remotely Sensed Data [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1994, 32 (1): 542-552.
- [61] Miao L D, Qi H R. Endmember Extraction from Highly Mixed Data Using Minimum Volume Constrained Nonnegative Matrix Factorization [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2007, 45 (3): 765-777.
- [62] Chan T-H, Chi C-Y, Huang Y M, *et al.* A Convex Analysis-based Minimum-Volume Enclosing Simplex Algorithm for Hyperspectral Unmixing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57 (11): 4418-4432.
- [63] Li J, Bioucas-Dias J M. Minimum Volume Simplex Analysis: A Fast Algorithm to Unmix Hyperspectral Data [C]//Proceedings IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, Boston, 2008.
- [64] Li J, Agathos A, Zaharie D, *et al.* Minimum Volume Simplex Analysis: A Fast Algorithm for Linear Hyperspectral Unmixing [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2015, 53 (9): 5067-5082.
- [65] Ambikapathi A, Chan T H, Ma W K, *et al.* Chance-Constrained Robust Minimum-Volume Enclosing Simplex Algorithm for Hyperspectral Unmixing [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2011, 49 (11): 4194-4209.
- [66] Hendrix E T, Garcia I, Plaza J, *et al.* A New Minimum-Volume Enclosing Algorithm for Endmember Identification and Abundance Estimation in Hyperspectral Data [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2012, 50 (7): 2744-2757.
- [67] Lin C H, Chi C Y, Wang Y H, *et al.* A Fast Hyperplane-based Minimum-Volume Enclosing Simplex Algorithm for Blind Hyperspectral Unmixing [J]. IEEE Transactions on Sig-

- nal Processing, 2016, 64(8): 1946-1961.
- [68] Zhang S Q, Agathos A, Li J. Robust Minimum Volume Simplex Analysis for Hyperspectral Unmixing [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2017, 55(11): 6431-6439.
- [69] Wang Tiancheng, Liu Xiangzhen, Dong Zezheng, *et al.* A Robust Minimum Volume based Algorithm with Automatically Estimating Regularization Parameters for Hyperspectral Unmixing[J]. Acta Automatica Sinica, 2017, 43(12): 2141-2159. [王天成, 刘相振, 董泽政, 等. 一种自适应鲁棒最小体积高光谱解混算法[J]. 自动化学报, 2017, 43(12): 2141-2159.]
- [70] Geng Xiurui, Zhao Yongchao, Zhou Guanhua. An Automatic Endmember Extraction Algorithm of Hyperspectral Imagery based on Simplex Volume [J]. Progress in Natural Science, 2006, 16(9): 1196-1200. [耿修瑞, 赵永超, 周冠华. 一种利用单形体体积自动提取高光谱图像端元的算法[J]. 自然科学进展, 2006, 16(9): 1196-1200.]
- [71] Geng Xiurui, Zhang Bing, Zhang Xia, *et al.* An Unmixing Method of Hyperspectral Imagery based on Convex Volume in High Dimensional Space [J]. Progress in Nature Sciences, 2004, 14(7): 810-814. [耿修瑞, 张兵, 张霞, 等. 一种基于高维空间凸面单形体体积的高光谱图像解混算法[J]. 自然科学进展, 2004, 14(7): 810-814.]
- [72] Honeine P, Richard C. Geometric Unmixing of Large Hyperspectral Images: A Barycentric Coordinate Approach [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2012, 50(6): 2185-2195.
- [73] Yang H D, An J B, Zhu C. Subspace-Projection-based Geometric Unmixing for Material Quantification in Hyperspectral Imagery [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2014, 7(6): 1966-1975.
- [74] Luo Wenfei, Zhong Liang, Zhang Bing, *et al.* A Spectral Unmixing Algorithm for Hyperspectral Image based on the Distance to Subspace [J]. Progress in Natural Science, 2008, 18(10): 1175-1180. [罗文斐, 钟亮, 张兵, 等. 基于子空间距离的高光谱图像光谱解混算法[J]. 自然科学进展, 2008, 18(10): 1175-1180.]
- [75] Geng X R, Ji L Y, Zhao Y C, *et al.* A New Endmember Generation Algorithm based on a Geometric Optimization Model for Hyperspectral Images [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2013, 10(4): 811-815.
- [76] Geng X R, Sun K, Ji L Y, *et al.* Optimizing the Endmembers Using Volume Invariant Constrained Model [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2015, 24(11): 3441-3449.
- [77] Ifarraguerri A, Chang C I. Multispectral and Hyperspectral Image Analysis with Convex Cones [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1999, 37(2): 756-770.
- [78] Gruninger J H, Lee J, Sundberg R L. Application of Convex Cone Analysis to Hyperspectral and Multispectral Scenes [C]//Proceedings of the SPIE, Image and Signal Processing for Remote Sensing VIII, Agia Pelagia, 2003.
- [79] Gruninger J H, Ratkowski A J, Hoke M L. The Sequential Maximum Angle Convex Cone (SMACC) Endmember Model [C]//Proceedings of the SPIE, Algorithms for Multispectral, Hyperspectral and Ultraspectral Imagery X, Orlando 2004.
- [80] Chu Haifeng, Zhai Zhongmin, Zhao Yindi, *et al.* A Convex Cone Analysis Method for Endmember Selection of Multispectral and Hyperspectral Images [J]. Journal of Remote Sensing, 2007, 11(4): 460-467. [褚海峰, 翟中敏, 赵银娣, 等. 一种多/高光谱遥感图像端元提取的凸锥分析算法[J]. 遥感学报, 2007, 11(4): 460-467.]
- [81] Zhu Shulong, Qi Jiancheng, Zhu Baoshan, *et al.* Fast Extraction of Endmembers from Convex Simplex's Boundary [J]. Journal of Remote Sensing, 2010, 14(3): 482-492. [朱述龙, 齐建成, 朱宝山, 等. 以凸面单体边界为搜索空间的端元快速提取算法[J]. 遥感学报, 2010, 14(3): 482-492.]
- [82] Solares C. The Gamma Algorithm in Convex Cone Analysis of Hyperspectral Images//Rudas I, Demiralp M, Mastorakis N. Recent Advances in Signals and Systems [M]. Budapest Tech, Hungary; WSEAS Press, 2009.
- [83] Xiong W, Tsai C T, Yang C W, *et al.* Convex Cone-based Endmember Extraction for Hyperspectral Imagery [C]//Proceedings of the SPIE, Optical Engineering and Applications, San Diego, CA, 2010.
- [84] Li H C, Chang C I. Geometric Convex Cone Volume Analysis [C]//Proceedings of the SPIE, Remotely Sensed Data Compression, Communications, and Processing XII, Baltimore, MD, 2016.
- [85] Chang C I. Real-time Progressive Hyperspectral Image Processing-Endmember Finding and Anomaly Detection [M]. USA, Baltimore, Maryland: Springer, 2016.
- [86] Xu Ning, Geng Xiurui, You Hongjian, *et al.* A Fully Constrained Linear Unmixing Method based on Simplex Regularization for Hyperspectral Image [J]. Journal of Infrared Millimeter Waves, 2016, 35(5): 592-599. [许宁, 耿修瑞, 肖新耀, 等. 一种基于单形体正化的高光谱数据全约束线性解混方法[J]. 红外与毫米波学报, 2016, 35(5): 592-599.]
- [87] Geng X R, Ji L Y, Wang F X, *et al.* Statistical Volume Analysis: A New Endmember Extraction Method for Multi-hyperspectral Imagery [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2016, 54(10): 6100-6109.
- [88] Heinz D C, Chang C I. Fully Constrained Least Squares Linear Mixture Analysis for Material Quantification in Hyperspectral Imagery [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2001, 39(3): 529-545.
- [89] Chen X H, Chen J, Jia X P, *et al.* A Quantitative Analysis of Virtual Endmembers' Increased Impact on the Collinearity Effect in Spectral Unmixing [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2011, 49(8): 2945-2956.
- [90] Chan T H, Ma W K, Ambikapathi A, *et al.* A Simplex Volume Maximization Framework for Hyperspectral Endmember Extraction [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Re-

- mote Sensing, 2011, 49(11): 4177-4193.
- [91] Ready P, Wintz P. Information Extraction, SNR Improvement, and Data Compression in Multispectral Imagery [J]. IEEE Transactions on Communications, 1973, 21 (10): 1123-1131.
- [92] Green A A, Berman M, Switzer P, *et al.* A Transformation for Ordering Multispectral Data in Terms of Image Quality with Implications for Noise Removal [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1988, 26(1): 65-74.
- [93] Geng Xiurui. Research on Hyperspectral Remote Sensing Imagery Target Detection and Classification Technology[D]. Beijing: Institute of Remote Sensing Application, Chinese Academy of Science, 2005.[耿修瑞. 高光谱遥感图像目标探测与分类技术研究[D]. 北京:中国科学院研究生院, 2005.]
- [94] Lin C H, Ma W K, Li W C, *et al.* Identifiability of the Simplex Volume Minimization Criterion for Blind Hyperspectral Unmixing-The No-Pure-Pixel Case [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2015, 53(10): 5530-5546.
- [95] Geng X R, Zhao Y C, Wang F X, *et al.* A New Volume Formula for a Simplex and Its Application to Endmember Extraction for Hyperspectral Image Analysis [J]. International Journal of Remote Sensing, 2010, 31(4): 1027-1235.

A Review and Brief Analysis of Convex Geometry-based Spectral Unmixing Methods for Hyperspectral Imagery

Xu Ning^{1,2}, Hu Yuxin^{1,2,3}, Geng Xiurui^{1,2,3}

(1. Key Laboratory of Technology in Geo-spatial Information Processing and Application System,

IECAS, Beijing 100190, China;

2. Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Convex geometry theory is the foundation of geometric spectral unmixing approaches in highly dimensional feature space for hyperspectral imagery. It is an important research field of spectral unmixing for the geometric methods, and they have the characteristics of intuition, simplicity and high performance. A review of convex geometry-based spectral unmixing methods is summarized, and some primary problems the researchers usually confronted are concluded in the paper. Principally, three main problems are briefly analyzed herein: (1) the influence of Dimensionality Reduction (DR) on the geometric endmember extraction methods for hyperspectral imagery; (2) the difference of two classic simplex volume criteria for spectral unmixing; (3) Three formulas and their relationships for simplex volume calculating of spectral unmixing for the hyperspectral imagery. Finally, some elementary analysis results are obtained in the paper.

Key words: Convex geometry; Endmember extraction; Abundance estimation; Spectral unmixing; Hyperspectral imagery